TEST DE FMT2 - FEBRERO 2007

1. El conjunto de números irracionales en el intervalo (0, 1) tiene el mismo cardinal que:
   a) $\mathbb{N}$.
   b) $\mathbb{Q}$.
   c) $\mathbb{R}$.

Sabemos por teoría que cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ tiene cardinal infinito no numerable, es decir contiene el mismo número de elementos que toda la recta real. Por ello la respuesta correcta es la c).

Solución : c)

2. El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^3 + 1 > 1\}$ tiene
   a) ínfimo.
   b) supremo.
   c) ninguna de las anteriores.

Las raíces cúbicas de –1 son:

$z_1 = e^{\pi/3}$

$z_2 = -1$

$z_3 = e^{5\pi/3}$

pero en este caso sólo nos interesa la raíz real

Operando: $x^3 + 1 > 0 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x > \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x > -1$

Por tanto: $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^3 + 1 > 1\} = (-1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ cuyo ínfimo está en el –1.

Solución : a)

3. Sea $z = re^{i\alpha}$ un número complejo no nulo. Entonces
   a) $-z = re^{-i\alpha}$.
   b) $-z = re^{i(\alpha+\pi)}$.
   c) $-z = re^{i(\alpha+\pi/2)}$.

Recuerda que:

$e^{i\pi} = -1$

Operando: $re^{i(\alpha+\pi)} = re^{i\alpha}e^{i\pi} = re^{i\alpha}(-1) = -re^{i\alpha} = -z$

Solución : b)

4. Las raíces n-ésimas de $1+i$ son

a) $\sqrt[n]{2}\, e^{i\frac{\pi/4 + 2k\pi}{n}}$, con $k = 1, ..., n-1$

b) $\sqrt[2n]{2}\, e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$

c) $\sqrt[2n]{2}\, e^{i\frac{\pi/4 + 2k\pi}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$

Lo primero que hacemos es pasar el número complejo a forma polar:

$$w_1 = 1+i \;\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \rho & = & \sqrt{1^2+1^2} & = & \sqrt{2} \\ \theta & = & \text{atan}(1/1) = \pi/4 & & (45^{\text{o}}) \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = re^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para} \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

que aplicada a nuestro caso queda:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = re^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} = \sqrt[2n]{2} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} = \dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{n} \quad \text{para} \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Luego la solución correcta es la c).

Solución : c)

Si nos dicen “acotado” a secas entendemos que está acotado superior e inferiormente

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío, cerrado y acotado. Si $a = \inf A$, entonces

a) a es el máximo de A.

b) a es el mínimo de A.

c) ninguna de las anteriores.

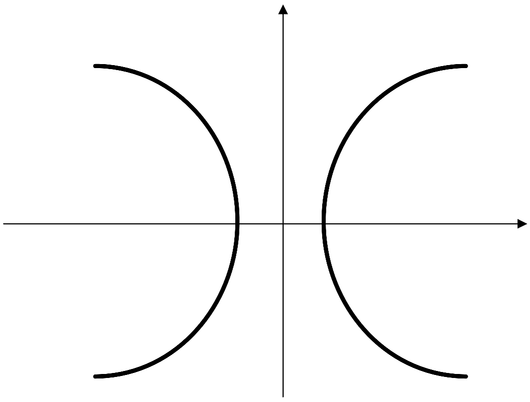
Por el teorema del ínfimo sabemos que por ser un conjunto acotado tiene ínfimo, que llamamos a, pero además nos dicen que se trata de un conjunto cerrado lo que quiere decir que su frontera también es parte del conjunto y por ello el ínfimo debe pertenecer a A que es la definición de mínimo. Por tanto a es a la vez el ínfimo y el mínimo de A.

Solución : b)

6. El conjunto $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2-y^2=1\right\}$

a) es abierto.
b) es compacto.
c) no es conexo.

Para resolver esta pregunta conviene saber que lo que nos están dando es una curva llamada hipérbola cuya gráfica es más o menos así:



El conjunto A no es abierto por tratarse de una curva en $\mathbb{R}^2$ (las curvas de $\mathbb{R}^2$ son siempre cerradas y no abiertas).
El conjunto A no es compacto porque no está acotado (la curva se va hacia el infinito)
Finalmente el conjunto A no es conexo porque no es conexo por caminos ya que por ejemplo no se pueden unir los puntos $(1,0)\in A$ y $(-1,0)\in A$ con un "camino" que esté totalmente contenido en A. Dicho de otra forma para ir del primer punto al segundo hay que salirse de A.

Solución : c)

7. Los límites inferior y superior de una sucesión real convergente (a_n) verifican:

a) lim inf $a_n <$ lim sup a_n.
b) lim inf $a_n =$ lim sup a_n.
c) lim inf $a_n >$ lim sup a_n.

Los límites superior e inferior sólo son diferentes cuando la sucesión no es convergente. En el caso de las sucesiones convergentes se cumple que

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$$

Solución : b)

8. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{n/2} =$

a) $e^{1/2}$.
b) $e^{1/4}$.
c) e.

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}\right)^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/4} = 1^{\infty}$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = 1^{\infty} \quad \Rightarrow \quad L = e^{\lambda} \quad \text{con} \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} (a_n - 1)\, b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular λ :

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}(a_n - 1)\, b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\frac{n}{4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n}{n}\right)\frac{n}{4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n}{4} = \frac{1}{4}$$

y, una vez calculado λ, el límite queda:

$$L = e^{\lambda} = e^{1/4}$$

Solución : b)

9. Sea $\sum a_n$ una serie real divergente. Entonces

a) necesariamente $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
b) necesariamente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
c) ninguna de las anteriores.

La serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente y sin embargo $\lim \frac{1}{n} = 0$ con lo que hemos probado que no es necesario que se cumpla $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Por tanto a) es falsa.

La serie $\sum n^2$ también es divergente y sin embargo $\lim n^2 = \infty \neq 0$ con lo que hemos probado que no es necesario que se cumpla $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto b) también es falsa.

Solución : c)

Nota:

Fíjate que ninguna de estas dos versiones es la que preguntan en este test

La teoría lo que dice es que si $\sum a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Lo que en la práctica significa que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ es divergente

10. La función real $f(x) = \ln|x|, \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$, es

a) es creciente en su dominio.
b) es continua en su dominio.
c) ninguna de las anteriores.

Si la expresamos como una función a trozos:

$$f(x) = \ln|x|, \ = \begin{cases} \ln(-x) & , \quad x < 0 \\ \ln(x) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Y la representamos observamos que es continua
En todos los puntos menos en $x = 0$.

Solución : b)

11. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no es continua en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, entonces

a) no puede existir ninguna de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
b) necesariamente existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
c) ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la c). Como contraejemplo para a) y b) podemos coger la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función no es continua en el origen $(0,0)$, se puede probar por polares. Además su derivada parcial con respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe en el origen pero la derivada parcial con respecto a y sí existe y vale $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Solución : c)

12. La derivada direccional de $f(x,y) = 3x + e^{xy^2}$ en el punto $(1,0)$ es máxima en la dirección del vector

a) (3,0) b) (3, 2) c) (4, 1)

Sabemos por teoría que la derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente. Por tanto tenemos que calcular el vector gradiente y particularizarlo en el punto (1, 0):

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3, \ 2\,x\,y\,e^{xy^2}) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(3,0) = (3, \ 2 \cdot 3 \cdot 0 \cdot e^0) = (3,0)$$

Así que, podemos afirmar que en el punto (0,0) la derivada direccional de f es máxima en la dirección (3, 0).

Solución : a)