MATEMÁTICAS EMPRESARIALES II
EXAMEN SEPTIEMBRE 2007

Matemáticas Empresariales II
Septiembre 2007
Ejercicio 1

Estudiar la convergencia de la siguiente serie : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!10^n}$

Para estudiar la convergencia de esta serie vamos a empezar probando con el criterio del cociente que es el siguiente:

Fíjate en que si el límite sale igual a uno el criterio del cociente no nos dice nada y por tanto tendremos que aplicar otros criterios distintos

$$Sea \quad \sum_{n}^{\infty} a_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k \quad \begin{cases} k < 1 & \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ k > 1 & \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ k = 1 & \Rightarrow \text{Caso dudoso} \end{cases}$$

Por tanto para aplicar este criterio tenemos que calcular el límite anterior y ver si el resultado es mayor o menor que uno. Veamos el valor del límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!\,10^{n+1}}}{\dfrac{(n+2)!}{n!\,10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!n!\,10^n}{(n+1)!\,10^{n+1}\,(n+2)!} =$$

En este paso hemos utilizado:

(n+3)! =(n+3)·(n+2)!

(n+1)! = (n+1)·n!

$10^{n+1}=10^n\cdot 10$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\cdot \cancel{(n+2)!}\ \cancel{n!}\ \cancel{10^n}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}\ \cancel{10^n}\,10\ \cancel{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{(n+1)10} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{10n+10} = \frac{1}{10}$$

así pues tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{10} = 0{,}1 < 1$$

por lo que la serie dada diverge.

Solución: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!10^n}$ es convergente

Estudiar la convergencia de la siguiente serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

Fíjate en que si el límite sale igual a cero o infinito este criterio no nos dice nada y por tanto tendremos que aplicar otros criterios distintos

Para estudiar la convergencia de esta serie vamos a probar con el segundo criterio de comparación (comparación por cociente) que es el siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \;\Rightarrow\; \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo caracter}$$

Elegir la serie patrón con la que vamos a comparar es, sin duda, lo más complicado del ejercicio. Se requiere cierta experiencia para escoger bien.

Por tanto para aplicar este criterio tenemos que calcular el límite anterior para ello tenemos que elegir una serie patrón para comparar. En nuestro caso elegimos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$ que sabemos que converge porque es la serie armónica con exponente mayor estrictamente que uno (3/2 > 1).

Veamos ahora el valor del límite:

En el numerador colocamos la serie que nos han dado y en el denominador la serie patrón

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot n^{3/2}}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}\cdot n^{3/2}}{n^2+n+1} =$$

En el numerador como son potencias de la misma base sumamos los exponentes:

$n^{1/2} \cdot n^{3/2} = n^{1/2+3/2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2+3/2}}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1} = 1$$

así pues tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

por lo que la serie dada tiene el mismo carácter que la serie patrón $\sum b_n$.

Solución: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ es convergente

Calcular la siguiente integral : $\int (x-1)\ln x\,dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u\;dv = u\,v - \int v\,du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{\ln x}_{u}\;\underbrace{(x-1)\,dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v. Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = (x-1)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int dv = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x$$

de forma que sustituyendo en la fórmula obtenemos,

$$I = \int (x-1)\ln x\,dx \;=\; \ln x\cdot\left(\frac{x^2}{2}-x\right) - \int\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{x}\;dx \;=\; \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x - \int \frac{x^2}{2x}-\frac{x}{x}\;dx \;=$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x - \int \frac{x}{2} - 1dx \;=\; \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-x\right) \;=\; \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x$$

Solución : $\boxed{I = \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x}$

Nota :

La clave de la integración por partes está en elegir bien u y dv. Para comprobar esto veamos, por ejemplo, que sucede si en este ejercicio escogemos u y dv al revés. Es decir,

$$I = \int \underbrace{(x-1)}_{u}\;\underbrace{\ln x\;dx}_{dv}$$

en este caso calculando du y v queda,

$$u = x-1 \qquad \Rightarrow \qquad du = 1\cdot\,dx$$

$$dv = \ln x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int dv = \int \ln x\,dx$$

En este caso la integral que aparece al intentar calcular dv se debe integrar también por partes lo que complica innecesariamente la resolución del problema.
Siempre que sucede esto quiere decir que nos hemos equivocado al elegir u y dv. Por tanto tendremos que comenzar de nuevo el ejercicio eligiendo u y dv de distinto modo.

Resolver la siguiente ecuación diferencial: $y'' + 2y' - 3y = 7$

Se trata de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de segundo orden.

Solución general de la ecuación homogénea:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial dada es:

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

que pasamos a resolver para obtener las raíces,

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -3 \end{cases}$$

y al tratarse de dos raíces simples la solución general de la ecuación homogénea queda :

$$y_H(x) = Ae^x + Be^{-3x}$$

donde A y B son constantes que quedan sin determinar pues el enunciado no nos da condiciones iniciales para calcularlas.

Solución particular de la ecuación completa:

Utilizamos el método de coeficientes indeterminados. Para ello nos fijamos en el término independiente de la ecuación diferencial que en este caso es una constante. Así pues, probamos con un solución particular de la forma:

$$y_p(x) = K$$

cuyas derivadas son:

$$y_p'(x) = 0 \qquad\qquad y_p''(x) = 0$$

Ahora sustituimos y_p, y_p', y_p'' en la ecuación del enunciado para obtener el valor de K :

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 7 \Rightarrow 0 + 2\cdot 0 - 3\cdot K = 7 \Rightarrow K = -\frac{7}{3}$$

Por tanto, la solución particular de la ecuación completa es:

$$y_p(x) = -\frac{7}{3}$$

Solución general de la ecuación completa:

Finalmente, para obtener la solución final sumamos $y_H(x)$ e $y_p(x)$:

Solución: $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-3x} - \dfrac{7}{3}$